На правах рукописи

Семичева Наталия Леонидовна

Методы нахождения бесповторных представлений не всюду определенных булевых функций

01.01.09 – дискретная математика
и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Иркутск – 2008

Работа выполнена в Иркутском государственном педагогическом университете

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор
Перязев Николай Алексеевич

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, доцент
Вороненко Андрей Анатольевич

кандидат технических наук
Семенов Александр Анатольевич

Ведущая организация:

Сибирский федеральный университет

Защита состоится 25 декабря 2008 г. в 14-00 на заседании диссертационного совета Д 212.074.01 в Иркутском государственном университете по адресу: 664003, г. Иркутск, бульвар Гагарина, 20.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Иркутского государственного университета (г. Иркутск, бульвар Гагарина, 24).

Автореферат разослан 24 ноября 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
канд. физ.-мат. наук, доцент В.Г. Антоник.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория конечных функций образует одно из главных направлений исследований в дискретной математике. И особое место здесь занимает теория булевых функций, как основной инструмент при разработке математических моделей цифровой техники. Распространенным способом задания булевых функций является их формульное или термальное представление. Большое распространение оно получило за счет того, что является основным этапом при проектировании дискретных устройств.

Прежде чем приступить к представлению функции термом, надо выбрать набор функций, которые можно использовать при этом представлении. Причем, если некоторый набор подходит для задания любой булевой функции, он называется базисом. Основополагающим в данной области был результат Э. Поста[1], описывающий все порожденные с помощью суперпозиции классы (замкнутых классов) булевых функций.

Со сложностью представления булевых функций термами связано понятие бесповторности. Бесповторными называются функции, которые можно представить термом, каждая переменная в который входит не более одного раза. Такие функции обладают наименьшей сложностью, если под сложностью понимать количество вхождений переменных в терм. В работе А. В. Кузнецова[2] было доказано, что бесповторное представление для булевой функции является «почти» единственным над множеством неразделимых функций, то есть функций, не допускающих бесповторной декомпозиции на функции меньшей размерности. Известно, что бесповторные функции преобладают при описании работы цифровых вычислительных машин. В связи с этим при исследовании бесповторных функций широкое распространение получил вопрос определения по заданной функции, является она бесповторной или нет. Обзор результатов по этому направлению сделан в монографии[3].

[1] Post E. L. Introduction to a general theory of elementary propositions / E. L. Post // Amer. J. Math. — 1921. — Vol. 43, № 4. — P. 163–185.

[2] Кузнецов А. В. О бесповторных контактных схемах и бесповторных суперпозициях функций алгебры логики / А. В. Кузнецов // Труды Математического ин-та им. В. А. Стеклова. — М.: Изд-во АН СССР, 1958. — Т. 51. — С. 186–225.

[3] Избранные вопросы теории булевых функций / Под ред. С. Ф. Винокурова и Н. А. Перязева. — М.: Физматлит, 2001. — 192 с.

А.А. Вороненко[4] разработал алгоритм линейной сложности для распознавания бесповторности всюду определенных булевых функции в любом наследственном базисе.

В практических приложениях находят применение функции, определенные не на всех наборах значений переменных. Как правило, на тех наборах, на которых значение функции не определено, неопределенность понимается как возможность принятия либо значения 0, либо значения 1, и называются такие функции недоопределенными булевыми функциями.

Использование при работе с недоопределенными функциями напрямую методов, полученных для тотальных (всюду определенных) булевых функций, приводит, как правило, к очень большому перебору. Поэтому разрабатываются алгоритмы для решения определенных задач специально для недоопределенных функций.

Существуют алгоритмы минимизации недоопределенных булевых функций, сужающие исходную задачу ввиду высокой алгоритмической сложности ее решения в общем виде. В частности, такие алгоритмы решают и задачу бесповторного представления исследуемой функции. Например, Я. Хлавичка и П. Фишер[5] дают алгоритм минимизации сильно неопределенных булевых функций.

Актуальной задачей является исследование не всюду определенных булевых функций с двумя видами неопределенности, первый из которых совпадает по смыслу с описанным ранее, второй вид неопределенности обозначает запрет на принятие конкретного значения и называется такой вид неопределенности частичностью. Функции с заданными таким образом значениями неопределенности называются недоопределенными частичными булевыми функциями. Впервые рассматривать функции с двумя видами неопределенности начали В. И. Пантелеев и Н. А. Перязев[6] в 1990 году при решении некоторых

[4]Вороненко А. А. Распознавание бесповторности в произвольном базисе / А. А. Вороненко. // Прикладная математика и информатика. — М.: Макс-Пресс, 2006. — Вып. 23. — С. 67–84.

[5] Hlavicka J. Algorithm for minimization of partial functions / J. Hlavicka, P. Fiser // Design and Diagnostics of Electronic Circuits and Systems Workshop — Bratislava. — 2000. — P. 130–133.

[6]Пантелеев В. И. Обобщенная интерпретация переменных: семантическое исследование и логический вывод / В. И. Пантелеев, Н. А. Перязев // Материалы школы ≪Пятая школа молодых математиков Сибири и Дальнего Востока≫. — Новосибирск, 1990. — С. 87–89.

логических вопросов. С. А. Ложкин[7] отмечает, что такие функции находят применение в технических приложениях. Важные результаты, необходимые для работы с недоопределенными частичными булевыми функциями, получены в работе[8]. Так как недоопределенные частичные булевы функции применяются при моделировании вычислительных устройств, а при их проектировании преобладают именно бесповторные функции, поэтому естественным является вопрос исследования недоопределенных частичных функций на бесповторность.

Цели работы:

- разработка алгоритма нахождения бесповторного представления недоопределенных булевых функций в бинарном базисе, исключающего полный перебор по всевозможным доопределениям;
- исследование свойств бесповторных недоопределенных частичных булевых функций в специальном базисе;
- разработка алгоритма нахождения бесповторных представлений недоопределенных частичных булевых функций в специальном базисе.

Методы исследований. В диссертации используются методы теории булевых функций, комбинаторики и теории алгоритмов.

Основные результаты, выносимые на защиту:

- алгоритм представления недоопределенных булевых функций бесповторными термами в бинарным базисе, доказательство корректности этого алгоритма;
- необходимые условия бесповторности недоопределенных частичных булевых функций в специальном базисе и свойства выделимых подмножеств переменных в этих функциях;

[7] Ложкин С. А. О синтезе формул и схем из не всюду определенных функциональных элементов / С. А. Ложкин // Труды VI международной конференции ≪Дискретные модели в теории управляющих систем≫. — М.: ВМиК МГУ. — 2004. — С. 44–47.

[8] Пантелеев В. И. Недоопределенные частичные булевы функции и булевы уравнения / В. И. Пантелеев, Н. А. Перязев // Материалы VII Международной конференции ≪Дискретные модели в теории управляющих систем≫. — М.: ВМиК МГУ, 2006. С. 262–265.

- алгоритм представления недоопределенных частичных булевых функций бесповторными термами в специальном базисе, доказательство корректности этого алгоритма.

Научная новизна. Основные результаты работы являются новыми. Получены алгоритмы распознавания бесповторности и нахождения бесповторных представлений не всюду определенных функций. Впервые исследованы свойства недоопределенных частичных булевых функций в специальном базисе.

Личный вклад автора. Все основные результаты, включенные в диссертацию, получены лично автором.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные в диссертации результаты имеют значение для теории булевых функций и дают теоретические верхние оценки сложности и практически реализуемые алгоритмы решения задачи нахождения бесповторных представлений не всюду определенных булевых функций.

Апробация работы. Результаты диссертации были представлены на Международной конференции «Алгебра, логика и кибернетика» (Иркутск, 2004 г.), на VI Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва, 2004 г.), конференции-конкурсе «Технологии Microsoft в теории и практике программирования» (Новосибирск, 2006 г.), школе-семинаре «Синтаксис и семантика логических систем» (Владивосток, 2008 г.), а также неоднократно докладывались на семинаре «Дискретная математика и математическая информатика» кафедры математической информатики Иркутского государственного педагогического университета.

Исследования по теме диссертации были выполнены при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 07-01-00240.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 6 работ. Основное содержание представлено в работах [1–6]. В число указанных работ входит одна статья [1] из «Перечня ведущих рецензируемых журналов и изданий ВАК РФ 2001-2006 гг.», одна статья [2] в научном сборнике, три полных текстов докладов [3–5] в материалах международных и всероссийских конференций.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 70 наименований. Общий объем диссертации — 88 страниц, включая 1 рисунок.

Основное содержание работы

Во **введении** дается обоснование актуальности темы исследований.

В **первой главе** определяются основные понятия и терминология, принятая при изложении результатов (**первый параграф**), а также делается обзор основных результатов по проблемам, рассматриваемым в диссертации, в том числе полученных автором (**второй параграф**).

Учитывая, что терминология в теории булевых функций не является устоявшейся, приведем несколько определений, необходимых для дальнейшего изложения.

Обозначим F — множество всех булевых функций.

Пусть $B \subseteq F$, X — некоторое множество символов, называемых переменными.

Индукцией определим понятие *терма* над B от множества переменных X:

1) x из X есть терм;

2) если $f \in B$, $dim(f) = m$ и $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ — термы, то $f(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$ есть терм.

Терм Φ представляет функцию f, если при подстановке значений из любого двоичного набора на соответствующие позиции переменных, полученное значение терма Φ будет совпадать со значением функции f на этом наборе.

Бесповторным называется терм от X, каждая переменная в который входит не более одного раза. Если существует бесповторный терм над базисом B, представляющий функцию f, то функция f называется *бесповторной* в B.

Основной задачей представляемой диссертации является распознавание бесповторновти по известному векторному заданию функции, и если она бесповторна, то нахождение бесповторного терма, ее представляющего.

Будем использовать следующие обозначения:

- $\tilde{\alpha}$ — двоичный набор;
- $\tilde{x}$ — набор переменных $(x_1, \ldots, x_n)$.

Остаточными функциями от функции f по переменной x_i называются функции, размерности которых на единицу меньше размерности f, и определяются они следующим образом:

$$f_{x_i}^{\sigma} = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \sigma, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

где $\sigma \in \{0, 1\}$. Если $\sigma = 0$, то остаточная функция называется нулевой остаточной; если $\sigma = 1$, то — единичной остаточной. Индуктивно понятие остаточной функции распространяется на множество переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ по набору $\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_s}$ $(s \leq n)$:

$$f_{x_{i_1}, \ldots, i_s}^{\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_s}} = \left(f_{i_1 \quad, \ldots, i_{s-1}}^{\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_{s-1}}} \right)_{i_s}^{\sigma_{i_s}},$$

где s называется *порядком* остаточной функции.

Сопряженной функцией от функции f по переменной x_i называется функция, размерность которой совпадает с размерностью f. Определяется сопряженная функция следующим образом:

$$f_{x_i}^{\nabla} = \bar{x}_i \cdot (f_{x_i}^0 \cdot f_{x_i}^1) \vee x_i \cdot (f_{x_i}^0 \vee f_{x_i}^1).$$

Функция $f(\tilde{x})$ называется *разделимой* по множествам $\tilde{y}$ и $\tilde{z}$, где $\tilde{y} \cup \tilde{z} = \tilde{x}$ и $\tilde{y} \cap \tilde{z} = \emptyset$, если существуют такие функции $h(\tilde{y})$ и $g(z, \tilde{z})$, что функцию f можно представить в виде

$$f(\tilde{x}) = g(h(\tilde{y}), \tilde{z}). \tag{1}$$

При этом множество переменных $\tilde{y}$ будем называть *выделимым*, функцию h — внутренней функцией декомпозиции, функцию g — внешней функцией декомпозиции.

Разработанные алгоритмы основаны на принципе разделительной декомпозиции, их основной задачей является по заданному вектору функции найти множества $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ и определить функции h и g.

Недоопределенной булевой функцией называется отображение из $\{0, 1\}^n$ в $\{0, 1, -\}$, где значение «$-$» вводится для обозначения значения «недоопределено».

Терм Φ представляет недоопределенную булеву функцию f, если значения Φ совпадают со значениями f на тех наборах, на которых она определена.

Вторая глава посвящена алгоритму бесповторного представления недоопредленных булевых функций над бинарным базисом. При работе с не всюду определенными булевыми функциями очень сложно подобрать такое доопределение, которое бы удовлетворяло нужным требованиям. Поэтому в **третьем параграфе** описывается алгоритм получения бесповторного представления недоопределенных булевых функций [1, 3], основанный на рекурсивном доопределении функции, используя критерий бесповторности булевых функций в бинарном базисе и критерий разделимости функции[9].

Переменная x называется *подозрительной на фиктивность переменной* функции f, если существует такое доопределение $\hat{f}$, при котором $\hat{f}_x^0 = \hat{f}_x^1$. Обозначение $\delta^*(f)$ вводится для множества подозрительных на фиктивность переменных функции f.

Так как при описании алгоритма учитываются различные нюансы, не позволяющие привести алгоритм в полном объеме, приведем схематичное его описание. На вход алгоритма подается вектор недоопределенной булевой функции f. Фиксируем множество переменных $\tilde{x}$ функции f. Выбираем переменную $x_i \in \tilde{x}$.

1. Находим множества $\delta^*(f_{x_i}^0)$, $\delta^*(f_{x_i}^1)$, $\delta^*(f_{x_i}^{\nabla})$.

2. Выбираем двухэлементное множество $\tilde{y} \in \delta^*(f_{x_i}^0) \cup \delta^*(f_{x_i}^1) \cup$ $\cup \delta^*(f_{x_i}^{\nabla})$, используя определенную стратегию.

3. Проверяем существует ли такое доопределение f, при котором обе переменные из $\tilde{y}$ являются фиктивными.

4. Проверяем переменные из $\tilde{y}$ на выделимость, используя критерий разделительной декомпозиции для недоопределенных функций.

5. На тех наборах значений переменных f, на которых она недоопределена и существует единственное значение из множества $\{0, 1\}$, приводящее к выделимости множества $\tilde{y}$, доопределяем f необходимыми значениями.

---

[9] Шоломов Л. А. Основы теории дискретных логических и вычислительных устройств / Л. А. Шоломов // М.: Наука, 1980. — 400 с.

6. Получаем функции g и h и применяем к ним рекурсивный вызов алгоритма. При этом найденное выделимое множество $\tilde{y}$ для f накладывает ограничение на множества, получаемые в пункте 1. Если алгоритм не нашел бесповторное представление функции g, переходим к пункту 2 и выбираем другое подмножество для проверки. Функция h выбирается таким образом, что она всегда будет иметь бесповторное преставление над бинарным

Также в третьем параграфе объясняются выбранные стратегии для уменьшения перебора множеств, проверяемых на выделимость.

В **четвертом параграфе** дается обоснование корректности алгоритма [1].

Теорема 2.1. *Алгоритм нахождения бесповторного представления недоопределенных булевых функций в бинарном базисе является корректным.*

В конце четвертого параграфа приводятся результаты тестирования алгоритма для функций, зависящих не более, чем от 18 переменных [4].

В **третьей главе** рассматриваются недоопределенные частичные булевы функции (н.ч.б.ф.), которые определяются как отображения из $\{0,1\}^n$ в $\{0,1,-,*\}$, где значение «$*$» вводится для обозначения значения «частично». Разработан алгоритм нахождения бесповторного представления недоопределенных булевых функций. Данный алгоритм также базируется на поиске выделимого множества. Но в связи с тем, что н.ч.б.ф. могут принимать не два, а четыре различных значения, критерий существования разделительной декомпозиции, определенный для тотальных функций, здесь неприменим. Поэтому в **пятом параграфе** сначала проводится исследование свойств бесповторных недоопределенных частичных булевых функций [2].

Для представления функций, принимающих значение $*$, термами над некоторым базисом B необходимо, чтобы в этот базис входила функция, также на некотором наборе значений переменных принимающая значение $*$. Рассмотрим базис $B_{\triangleright} = \{-, \&, \vee, \oplus, \triangleright\}$, где функция $\triangleright$ определеяется следующим образом: $\triangleright(0,0) = *, \triangleright(0,1) = 1$, $\triangleright(1,0) = 0, \triangleright(1,1) = -$.

Среди н.ч.б.ф. будем отдельно выделять *тотальные* функции, определенные на всех наборах значений переменных значениями 0 и 1 и *собственные* н.ч.б.ф., принимающие все четыре значения из множества $\{0, 1, -, *\}$.

Так как суперпозиция н.ч.б.ф. не совпадает с суперпозицией четырехзначных функций, то приведем ее определение.

Суперпозиция $g(\tilde{x}) = f(f_1(\tilde{x}), \ldots, f_m(\tilde{x}))$ для н.ч.б.ф. определяется следующим образом: 1) набор $\tilde{\tau} \in \{0, 1, *\}^n$ называется *уточнением* набора $\tilde{\gamma} \in \{0, 1, -, *\}^n$, если для тех i, для которых $\gamma_i \neq -$, следует, что $\tau_i = \gamma_i$, а для остальных i имеем $\tau_i \neq *$; 2) пусть $f_i(\tilde{x})$, f — н.ч.б.ф, $(i = 1, ..., m)$. Для набора $\tilde{\sigma} \in \{0, 1\}$ обозначим через $\tilde{\gamma}$ набор $< f_1(\tilde{\sigma}), \ldots, f_m(\tilde{\sigma}) >$ и тогда

$g(\tilde{\sigma}) = *,$	если существует $i \in \{1, \ldots, m\}$ такое, что $f_i(\tilde{\sigma}) = *$ и для любых уточнений $\tilde{\tau}$ набора $\tilde{\gamma}$ выполняется $f(\tilde{\tau}) = *$;
$g(\tilde{\sigma}) = -,$	если для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$ выполняется $f_i(\tilde{\sigma}) \neq *$, и существует уточнение $\tilde{\tau}$ набора $\tilde{\gamma}$ такое, что $f(\tilde{\tau}) = -$ или существуют уточнения $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ набора $\tilde{\gamma}$ такие, что $f(\tilde{\alpha}) = 0$ и $f(\tilde{\beta}) = 1$;
$g(\tilde{\sigma}) = 1,$	если для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$ выполняется $f_i(\tilde{\sigma}) \neq *$ и для любого уточнения $\tilde{\tau}$ набора $\tilde{\gamma}$ имеем $f(\tilde{\tau}) \in \{1, *\}$, и при этом существует уточнение $\tilde{\alpha}$ набора $\tilde{\gamma}$ такое, что $f(\tilde{\alpha}) = 1$;
$g(\tilde{\sigma}) = 0,$	если для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$ выполняется $f_i(\tilde{\sigma}) \neq *$ и для любого уточнения $\tilde{\tau}$ набора $\tilde{\gamma}$ имеем $f(\tilde{\tau}) \in \{0, *\}$, и при этом существует уточнение $\tilde{\alpha}$ набора $\tilde{\gamma}$ такое, что $f(\tilde{\alpha}) = 0$.

Следующее утверждение позволяет существенно сократить количество функций, исследуемых на бесповторность.

Лемма 1. *Если f — бесповторная в $B_{\triangleright}$, тогда:*

1) *функция f является либо тотальной, либо собственной;*

2) *если f — собственная, тогда любая остаточная функция по любой переменной принимает как значения из множества $\{0, 1\}$, так и значения из множества $\{-, *\}$, то есть:*

$$\forall \sigma \ \forall x_i \ \exists \tilde{\alpha} \ \ f_{x_i}^{\sigma}(\tilde{\alpha}) = \alpha, \ \ \alpha, \sigma \in \{0, 1\},$$
$$\forall \sigma \ \forall x_i \ \exists \tilde{\beta} \ \ f_{x_i}^{\sigma}(\tilde{\beta}) = \beta, \ \ \beta \in \{-, *\}, \sigma \in \{0, 1\}.$$

Замечание 1. *Для двухместных недоопределенных частичных булевых функций условия леммы 1 являются необходимыми и достаточными условиями бесповторности в базисе* $B_{\triangleright}$.

В следующей теореме определяются свойства выделимого множества бесповторных н.ч.б.ф. в базисе $B_{\triangleright}$, помогающие определить, является ли функция f разделимой по заданным множествам $\tilde{y}$ и $\tilde{z}$.

В базисе $B_{\triangleright}$ любую н.ч.б.ф. можно представить в виде терма, в котором используются только тесные отрицания. Для перехода к тесным отрицаниям используются законы де Моргана и тождество $\overline{x \triangleright y} = y \triangleright x$. Такие термы будем рассматривать в виде корневого бинарного дерева T, листья которого помечены переменными или их отрицаниями, а остальные вершины — символами бинарных операций из множества $\{\&, \vee, \oplus, \triangleright\}$. Если важно подчеркнуть, переменными из какого множества помечены листья дерева T, тогда будем обозначать дерево $T(\tilde{x})$.

Теорема 3.1. *Пусть f — существенная бесповторная н.ч.б.ф. и ее можно представить с помощью разделительной декомпозиции $f(\tilde{y}, \tilde{z}) = g(h(\tilde{y}), \tilde{z})$, $\Phi(\tilde{y}, \tilde{z}) = \Phi_g(\Phi_h(\tilde{y}), \tilde{z})$, где Φ, Φ_g, Φ_h — бесповторные термы, представляющие соответственно функции f, g, h. Причем в терме Φ встречаются только тесные отрицания. Дерево T представляет терм Φ. Тогда верно следующее:*

1) *среди остаточных функций от f по множеству переменных $\tilde{y}$ ровно 2 различных $\Leftrightarrow$ h тотальная;*

2) *среди остаточных функций от f по множеству переменных $\tilde{y}$ ровно 3 различных $\Leftrightarrow$ h собственная, и для дерева T существует вершина v, помеченная $\triangleright$, которая является предком поддерева T_h, и на пути от корневой вершины поддерева T_h к вершине v не существует вершины v', помеченной $\oplus$ или $\triangleright$;*

3) *в остальных случаях, среди остаточных будет ровно 4 различных.*

На основании леммы 1 и теоремы 3.1 получаем следствия, определяющие основные шаги алгоритма бесповторного представления н.ч.б.ф.

Следствие 1. *Пусть f — бесповторная н.ч.б.ф., представимая в виде (1), и среди остаточных функций от f по $\tilde{y}$ ровно две различных, тогда не существует набора $\tilde{\alpha}$ такого, что $f_{\tilde{y}}^{\tilde{\alpha}} = *$.*

Следствие 2. 1) *Пусть f — бесповторная н.ч.б.ф., представимая в виде (1), и среди остаточных функций от f по $\tilde{y}$ три или* *четыре различных, тогда существует набор* $\tilde{\alpha}$ *такой, что* $f_{\tilde{y}}^{\tilde{\alpha}} = *$.

2) *Пусть н.ч.б.ф.* f *можно представить в виде (1) и среди остаточных функций от* f *по* $\tilde{y}$ *четыре различных, тогда существует набор* $\tilde{\alpha}$ *такой, что* $f_{\tilde{y}}^{\tilde{\alpha}} = *$.

Пусть f — бесповторная, представленная в виде (1), тогда существуют наборы $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$, $\tilde{\alpha}_3$ такие, что $f_{\tilde{y}}^{\tilde{\alpha}_1}(\tilde{z}) = g(0, \tilde{z})$, $f_{\tilde{y}}^{\tilde{\alpha}_2}(\tilde{z}) = g(1, \tilde{z})$, $f_{\tilde{y}}^{\tilde{\alpha}_3}(\tilde{z}) = g(-, \tilde{z})$. Функция $g(-, \tilde{z})$ не имеет самостоятельного значения, а зависит от значений функций $g(0, \tilde{z})$ и $g(1, \tilde{z})$. То есть, исходя из правил суперпозиции, для $g(-, \tilde{z})$ должны выполняться следующие условия:

$$
(**)\quad
\begin{aligned}
&1)\ \text{если } g(0, (\tilde{\sigma})) = g(1, (\tilde{\sigma})) = \alpha,\\
&\qquad \text{где } \alpha \in \{0, 1, -, *\},\ \text{тогда } g(-, \tilde{\sigma}) = \alpha;\\
&2)\ \text{если } g(0, (\tilde{\sigma})) = \alpha,\ g(1, (\tilde{\sigma})) = \bar{\alpha},\\
&\qquad \text{где } \alpha \in \{0, 1, -, *\},\ \text{тогда } g(-, \tilde{\sigma}) =;\\
&3)\ \text{если } g(\beta, (\tilde{\sigma})) = -,\ g(\bar{\beta}, (\tilde{\sigma})) = \alpha,\\
&\qquad \text{где } \alpha \in \{-, *\},\ \beta \in \{0, 1\},\ \text{тогда } g(-, \tilde{\sigma}) = -;\\
&4)\ \text{если } g(\beta, (\tilde{\sigma})) = *,\ g(\bar{\beta}, (\tilde{\sigma})) = \alpha,\\
&\text{где } \alpha \in \{0, 1, -, *\},\ \beta \in \{0, 1\},\ \text{тогда } g(-, \tilde{\sigma}) = \alpha.
\end{aligned}
$$

Определим множества:

$$
\begin{aligned}
A &= \{\tilde{\alpha} :\ g(-, \tilde{\sigma}) = -\};\\
B &= \{\tilde{\sigma} :\ g(0, \tilde{\sigma}) = -\};\\
C &= \{\tilde{\sigma} :\ g(1, \tilde{\sigma}) = -\};\\
D &= \{\tilde{\sigma} :\ g(0, \tilde{\sigma}) = \alpha,\ g(1, \tilde{\sigma}) = \bar{\alpha}\}.
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Исходя из условий $(**)$, получаем еще два следствия.

Следствие 3. *Для введенных в (2) множеств выполняется:*

$$A = B \cup C \cup D.$$

Следствие 4. *Для бесповторной булевой функции* g *справедливо: если* $A = B$ *или* $A = C$, *тогда* $g(0, \tilde{z}) = g(-, \tilde{z})$ *или* $g(1, \tilde{z}) = g(-, \tilde{z})$, *соответственно.*

В **шестом параграфе** данной главы представлен алгоритм бесповторного представления н.ч.б.ф. над $B_{\triangleright}$ [2, 5, 6]. Схема алгоритма нахождения бесповторного представления н.ч.б.ф. над $B_{\triangleright}$ заключается в следующем. На вход алгоритма подается вектор недоопределенной частичной булевой функции f. Фиксируем множество переменных $\tilde{x}$ функции f.

1. Если местность функции меньше 3, и функция f удовлетворяет условиям леммы 1, находим бесповторный терм Φ, представляющий функцию f, иначе переходим к пункту 2. Если одноместная или двухместная функция не удовлетворяет условиям леммы 1, значит, для нее не существует бесповторного представления в базисе $B_{\triangleright}$.

2. Выбираем двухэлементное множество $\tilde{y} \in \tilde{x}$. За время работы алгоритма каждое множество проверяется не более одного раза. Переходим к пункту 3.

3. Находим остаточные функции от f по $\tilde{y}$ и проверяем выполнение следствий 1 – 4. Если все условия выполняются, то получаем функции g и h и применяем к ним рекурсивный вызов алгоритма. Иначе возвращаемся к пункту 2 и выбираем другое множество для проверки на выделимость. Функция не имеет бесповторного представления в базисе $B_{\triangleright}$, если при рекурсивном вызове алгоритма бесповторные представления функций g и h не были найдены, или если все двухэлементные подмножества были проверены на выделимость и не дали положительного результата.

Теорема 3.2. *Алгоритм нахождения бесповторных представлений недоопределенных частичных булевых функций в базисе $B_{\triangleright}$ является корректным.*

Если под сложностью понимать количество операций сравнения функций, то сложность алгоритма равна $O(n^2)$, где n — длина входного вектора.

В конце параграфа приводятся результаты тестирования алгоритма для функций, зависящих не более, чем от 19 переменных [2].

В **заключении** дан обзор основных результатов, полученных в работе.

Публикации по теме диссертации

[1] Коршунова Н.Л. (Семичева Н. Л.) Представление частичных булевых функций бесповторными термами над бинарным базисом / Н. Л. Коршунова // Вестник БГУ. Серия 13: Математика и информатика. — 2005. — Вып.2. — С. 26–35.

[2] Семичева Н. Л. Нахождение бесповторных представлений недоопределенных частичных булевых функций / Н. Л. Семичева. — Иркутский государственный педагогический университет. Серия: Дискретная математика и информатика. Вып. 19. — Иркутск, 2008. — 35 с.

[3] Коршунова Н.Л. (Семичева Н. Л.) Нахождение представления частичных булевых функций бесповторными термами над бинарным базисом / Н. Л. Коршунова // Материалы международной конференции «Алгебра, логика и кибернетика». — Иркутск, ГОУ ВПО „ИГПУ", 2004. — С. 153–155.

[4] Коршунова Н.Л. (Семичева Н. Л.) Алгоритм представления частичных булевых функций бесповторными термами и его программная реализация / Н. Л. Коршунова // Материалы Конференции-конкурса работ студентов, аспирантов и молодых ученых «Технологии Microsoft в теории и практике программирования». — Новосибирск, 2006. — С. 192–193.

[5] Семичева Н. Л. Представление недоопределенных частичных булевых функций бесповторными термами / Н. Л. Семичева // Материалы российской школы-семинара «Синтаксис и семантика логических схем». — Владивосток, 2008. — С. 45–47.

[6] Семичева Н. Л. Бесповторное предсталение недоопределенных частичных булевых функций / Н. Л. Семичева // Материалы XV международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики». — Казань, 2008. — С. 105.

Редакционно-издательский отдел
государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Иркутский государственный педагогический университет»
664003, Иркутск, ул. Нижняя Набережная, 6

Формат бумаги 60×84 1/16. Объем 1,0 п.л.
Тираж 100 экз.

Отпечатано в ОКИС ИГПУ
664003, Иркутск, ул. Нижняя Набережная, 6